

## Анализ на задача А-В

Решения, условие: Димитър Шапатов; Анализ: Claude Opus 4.8

Решението се крие в името на задачата. Нека докажем валидността му, като докажем съществуването на стойността  $A - B$ .

**Твърдение:** Ако  $a$  и  $b$  са произволни цели числа (положителни, отрицателни или нула), тогава  $a - b$  съществува и е цяло число.

Тръгваме от аксиомите на Пеано за  $(\mathbb{N}, 0, S)$  и от рекурсивното определение на събирането:  $a + 0 = a$  и  $a + S(b) = S(a + b)$ . По индукция се доказват асоциативността, комутативността и съкратимостта, тоест че  $a + c = b + c$  влече  $a = b$ . Плюс достатъчно теория на множествата, за да образуваме  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  и факторно множество по релация.

Върху  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  дефинираме  $(a, b) \sim (c, d)$  точно когато  $a + d = c + b$ . Двойката  $(a, b)$  кодира  $a - b$ , а условието е пренаписване на  $a - b = c - d$  без изваждане. Че това е релация на еквивалентност, се проверява директно: рефлексивността и симетричността са тривиални, а за транзитивността, ако  $a + d = c + b$  и  $c + f = e + d$ , добавяме  $f$  към първото и получаваме  $a + d + f = c + b + f$ , заместваме  $c + f$  с  $e + d$  и стигаме до  $(a + f) + d = (e + b) + d$ , откъдето по съкратимост  $a + f = e + b$ . Дефинираме  $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$  и означаваме класовете с  $[a, b]$ .

Сега, върху  $\mathbb{Z}$ , дефинираме двете операции:

$$[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d] \quad \text{и} \quad [a, b] - [c, d] := [a + d, b + c].$$

Коректността се проверява така: ако  $[a, b] = [a', b']$  и  $[c, d] = [c', d']$ , тоест  $a + b' = a' + b$  и  $c + d' = c' + d$ , събираме двете равенства почленно и след пренареждане получаваме точно  $a + d + b' + c' = a' + d' + b + c$ , което по определение казва, че  $(a + d, b + c) \sim (a' + d', b' + c')$ . Значи разликата не зависи от избора на представители.

Оттук нататък твърдението за цели числа е почти непосредствено. Нека  $x$  и  $y$  са произволни елементи на  $\mathbb{Z}$ . По определение на факторното множество съществуват естествени  $a, b, c, d$  с  $x = [a, b]$  и  $y = [c, d]$ . Тогава  $a + d$  и  $b + c$  са естествени числа, защото събирането е тотална операция върху  $\mathbb{N}$  — това е директно следствие от рекурсивното му определение и индукцията. Следователно наредената двойка  $(a + d, b + c)$  е елемент на  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , а класът ѝ  $[a + d, b + c]$  е елемент на  $\mathbb{Z}$ . Този клас е точно  $x - y$ . Той съществува, той е в  $\mathbb{Z}$ , и по горната проверка не зависи от избора на  $a, b, c, d$ . Значи  $x - y$  съществува за всички  $x, y$  от  $\mathbb{Z}$ .

Единствеността също идва даром. Ако  $z$  е такъв елемент на  $\mathbb{Z}$ , че  $z + y = x$ , то по определение  $z = x - y$ . Наистина, ако и  $z' + y = x$ , то  $z + y = z' + y$ , и остава да видим, че събирането в  $\mathbb{Z}$  е съкратимо. Записваме  $z = [p, q]$ ,  $z' = [r, s]$ ,  $y = [c, d]$ . От



$[p + c, q + d] = [r + c, s + d]$  следва  $p + c + s + d = r + c + q + d$ , и по съкратимост в  $\mathbb{N}$  (приложена два пъти, веднъж за  $c$  и веднъж за  $d$ ) получаваме  $p + s = r + q$ , тоест  $z = z'$ . Освен това

$$[a + d, b + c] + [c, d] = [a + d + c, b + c + d] = [a, b],$$

защото  $(a + d + c) + b = a + (b + c + d)$ , така че намереният елемент наистина решава уравнението.

Следователно за цели  $a$  и  $b$  разликата  $a - b$  съществува, единствена е и е цяло число. Тоталността е вградена в самата конструкция на  $\mathbb{Z}$ : изваждането се свежда до две събирания в  $\mathbb{N}$ , а събирането в  $\mathbb{N}$  е тотално по индукция. ■